



**MJ-1309**

**B.Sc. (Part-II)**

**Term End Examination, March-April, 2022**

**MATHEMATICS**

**Paper - I**

**Advanced Calculus**

*Time : Three Hours]*

*[Maximum Marks : 50*

*[Minimum Pass Marks : 17*

---

**नोट** : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Note** : Answer **all** questions. All questions carry equal marks.

---

**इकाई / Unit-I**

1. (a) दिखाइए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है। तथापि इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

Show that every convergent sequence is bounded. However the converse is not true in general.

---

(2)

(b) दर्शाए कि अनुक्रम  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$  जहाँ

$$S_n = \frac{1}{L^1} + \frac{1}{L^2} + \frac{1}{L^3} + \dots + \frac{1}{L^n}$$

अभिसारी है।

Show that the sequence  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ , where

$$S_n = \frac{1}{L^1} + \frac{1}{L^2} + \frac{1}{L^3} + \dots + \frac{1}{L^n}$$

is convergent.

अथवा / OR

(a) सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^n}{L^n} \right)^{1/n} = e$$

Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^n}{L^n} \right)^{1/n} = e$$

(b) श्रेणी  $1 - \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^4}{L^4} - \frac{x^6}{L^6} + \dots$  के निरपेक्ष

अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

(3)

Test the absolute convergence of the series

$$1 - \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^4}{L^4} - \frac{x^6}{L^6} + \dots$$

इकाई / Unit-II

2. (a) बोलजानो प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Bolzano's theorem.

(b) फलन  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  के लिए अंतराल  $[2, 4]$  में लैग्रान्ज के माध्यमान प्रमेय को सत्यपित कीजिए।

Verify Lagrange's mean value theorem for the function

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \text{ in the interval } [2, 4].$$

अथवा / OR

(a) फलन  $f(x) = \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$  जब  $x \neq 0$  की $x = 0$  पर सांतत्य और असांतत्य की विवेचना कीजिए।

(4)

Discuss continuity and discontinuity at the point  $x=0$  of the function

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+e^{1/x}} \text{ when } x \neq 0.$$

(b) सिद्ध कीजिए कि

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-2} x^{n-1}}{(n-1)} + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

Prove that

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-2} x^{n-1}}{(n-1)} + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

इकाई / Unit-III

3. (a) यदि  $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ , तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x+y+z)^2}$$

(5)

If  $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ , then prove that

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x+y+z)^2}$$

(b) समीकरण

$$\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

का रूपांतरण  $\tan z = e^x$  रखकर कीजिए।

Transform the equation

$$\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$$

by putting  $\tan z = e^x$ .

अथवा / OR

(a) फलन  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  का  $(x-2)$  और  $(y-3)$  के घातों में टेलर प्रसार ज्ञात कीजिए।

Find the Taylor expansion in the powers of  $(x-2)$  and  $(y-3)$  of the function

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

(6)

- (b) यदि  $x+y+z=u$ ;  $y+z=uv$ ;  $z=uvw$ , तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2v$$

If  $x+y+z=u$ ;  $y+z=uv$ ;  $z=uvw$ , then prove that

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = u^2v$$

इकाई / Unit-IV

4. (a) सरल रेखाओं के कुल

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जहाँ, कोण  $\alpha$  प्राचल है।

Find the envelope for the family of straight lines

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha = a^2 - b^2$$

where angle  $\alpha$  is parameter.

- (b) फलन  $u = x^3y^2(1-x-y)$  के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum and minimum value of the function  $u = x^3y^2(1-x-y)$ .

अथवा / OR

(7)

- (a) दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- (b)  $u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$  के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मानों को ज्ञात कीजिए जब  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  और  $lx + my + nz = 0$

Determine maximum or minimum value of  $u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$  when  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  and  $lx + my + nz = 0$ .

इकाई / Unit-V

5. (a) दिखाइए कि

$$\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi \cdot 2m}}{2^{2m-1}}$$

जहाँ  $m$  एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

Show that

$$\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi \cdot 2m}}{2^{2m-1}}$$

where  $m$  is a positive real number.

(8)

(b)  $\iint_R xy dx dy$  का मान निकालिए, जहाँ समाकलन क्षेत्र  $R$  वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  का घन चतुर्थांश है।

Find the value of  $\iint_R xy dx dy$ , where region of integration  $R$  is positive quadrant of the circle  $x^2 + y^2 = a^2$ .

अथवा / OR

(a) मान निकालिए

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

जहाँ  $V$ , गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  का आयतन है।

Find the value of

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} \quad \text{where } V \text{ is}$$

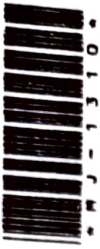
volume of the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

(b) समाकलन  $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dx dy$  के क्रम को

बदलिए और इसका मूल्यांकन कीजिए।

Change the order of integration and find

its value for  $\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dx dy$ .



**MJ-1310**

**B.Sc. (Part-II)**

**Term End Examination, March-April, 2022**

**MATHEMATICS**

**Paper - II**

**Differential Equations**

*Time : Three Hours]*

*[Maximum Marks : 50*

*[Minimum Pass Marks : 17*

---

**Note** : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

---

**Unit-I**

1. (a) Solve in series the equation  $xy'' + y = 0$ .

(b) Prove that

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \int_0^{\infty} (bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2)

- (c) Find all the eigen values and eigen functions of the following Sturm-Liouville problem

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

### Unit-II

2. (a) Find the Laplace transformation of the function  $f(t) = t \cos^2 t$ .

- (b) Find

$$L^{-1} \left\{ \frac{p+1}{p^2+6p+25} \right\}$$

- (c) Solve  $(D^2+1)y=0$ ,  $y=1$ ,  $Dy=0$  when  $t=0$  by Laplace transformation method.

### Unit-III

3. (a) Solve

$$x^2 p + y^2 q = z^2$$

- (b) Find the complete integral (C.I.) of  $(y-x)(qy-px) = (p-q)^2$

- (c) Solve by Charpit's method

$$z = px + qy + p^2 + q^2$$

### Unit-IV

4. (a) Classify and reduce to canonical form of the equation  $r + 2s + t = 0$ .

(3)

- (b) Solve

$$(D^2 + 2DD' + 2D'^2)z = e^{2x+2y}$$

- (c) Solve  $r = a^2 t$  by Monge's method.

### Unit-V

5. (a) Investigate the closeness of the curve

$$y(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$$

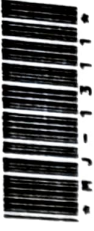
- (b) Test for extremum the functional

$$I[y(x)] = \int_0^4 [xy' - y'^2] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(u) = 3.$$

- (c) Find the extremizing function for the functional

$$J[z(x, y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2z f(x, y) \right] dx dy$$

where  $f(x, y)$  is a known function.



**MJ-1311**

**B.Sc. (Part - II)**

**Term End Examination, March-April, 2022**

**MATHEMATICS**

**Paper - III**

**Mechanics**

*Time* : Three Hours]

[*Maximum Marks* : 50

[*Minimum Pass Marks* : 17

---

**नोट** : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए।  
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Note** : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

---

**इकाई / Unit-I**

1. (a) संतुलन के लिए ऊर्जा परीक्षण का नियम लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove energy test for stability.



(2)

- (b) एक दीर्घवृत्त जिसका दीर्घ अक्ष क्षैतिज है, के नाभि पर के एक चिकने रिंग से एक चिकना छड़ गुजरता है तथा इसका निचला सिरा वक्र के उस चतुर्थांश पर टिका है जो नाभि से दूर है। इसके साम्य की स्थिति ज्ञात कीजिए तथा

$$\text{दर्शाए कि इसकी लम्बाई } \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} \sqrt{(1+8e^2)}$$

है, जहाँ  $2a$  दीर्घ अक्ष की लम्बाई एवं  $e$  उत्केन्द्रता है।

A smooth rod passes from a smooth ring at focus of an ellipse, whose major axis is horizontal, and its lower end rests at that quarter of the curve which is away from focus. Find position of its equilibrium and show that its length is

$$\frac{3a}{4} + \frac{a}{4} \sqrt{(1+8e^2)}, \text{ where } 2a \text{ is length of}$$

the major axis and  $e$  is eccentricity.

- (c) सामान्य कैटेनरी का कार्तीय समीकरण प्राप्त कीजिए।

Obtain cartesian equation of common catenary.

(3)

## इकाई / Unit-II

2. (a) दो दिए हुए मरोड़ों का परिणामी मरोड़ ज्ञात कीजिए।

Find the resultant wrench of two given wrenches.

- (b) समान बल नियामक अक्षों एवं सरल रेखा

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

के अनुदिश लगते हैं। निकाय के केन्द्रीय अक्ष का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Equal forces act along coordinate axes and the line

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

Find equation of central axis of the system.

- (c) बल निकाय  $(X, Y, Z; L, M, N)$  के लिए तल  $x+y+z=0$  का निष्प्रभावी बिन्दु ज्ञात कीजिए।

For system of forces  $(X, Y, Z; L, M, N)$  find null point of the plane  $x+y+z=0$ .

(4)

## इकाई / Unit-III

3. (a) प्राकृतिक लम्बाई  $l$  के एक हल्के प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा बिन्दु  $A$  से बाँध दिया जाता है, तथा दूसरे सिरे से एक कण बाँधा जाता है जिसका भार साम्यावस्था में डोरी को  $l_1$  लम्बाई तक विस्तारित कर देता है, दर्शाए कि यदि कण को  $A$  पर से विराम से गिराया जाए, तो यह साम्यावस्था से  $\sqrt{(l_1^2 - l^2)}$  गहराई पर क्षणिक विराम में आयेगा।

One end of a light elastic string of natural length  $l$  is fixed from point  $A$  and from another end a particle is fixed whose weight in equilibrium extends length of the string upto  $l_1$ ; show that if the particle is dropped from rest at  $A$ , then it will be at instant rest at the depth

$$\sqrt{(l_1^2 - l^2)} \text{ from equilibrium.}$$

- (b) एक कण समान वेग से परवलय पर चलता है। सिद्ध कीजिए कि ध्रुव  $S$  के सापेक्ष किसी बिन्दु  $P$  पर कण का कोणीय वेग  $SP^{3/2}$  के व्युत्क्रमानुपाती होगा।

(5)

A particle travels on a parabola with uniform velocity. Prove that angular velocity of the particle at any point  $P$ , with respect to pole  $S$ , will be inversely proportional to  $SP^{3/2}$ .

- (c) केन्द्रीय कक्ष के लिए बल का व्युत्क्रम वर्ग नियम लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove law of force of inverse square for central orbit.

## इकाई / Unit-IV

4. (a) स्पर्शी के अनुदिश अचानक आवेग द्वारा किसी दीर्घवृत्तीय केन्द्रीय कक्ष की गति में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

Find changes in motion of any elliptical central orbit due to sudden momentum along tangent.

- (b) स्पर्श रेखीय एवं अभिलम्ब रेखीय वेग के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

Find expressions for tangential and normal velocities.

(6)

- (c) गुरुत्व के अधीन एक दिए हुए रूक्ष समतल वक्र पर कोई कण घूमता है, गति का निर्धारण कीजिए।

A particle moves under gravity on a given rough plane curve, determine equation of motion.

### इकाई / Unit-V

5. (a) एक कण गुरुत्व के अन्तर्गत एक अवरोधी माध्यम में जिसका अवरोध  $mk$  (वेग) के बराबर है, क्षैतिज से  $\alpha$  कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है। गति की विवेचना कीजिए।

A particle is projected at an angle  $\alpha$  from horizontal under gravity in a resisting medium, whose resistance is equal to  $mk$  (velocity). Discuss the equation of motion.

- (b) वर्षा की एक गोलाकार बूँद मुक्त रूप से गिरता हुआ, प्रत्येक क्षण अपने आयतन में उस क्षण अपने सतह के क्षेत्रफल का  $\lambda$  गुना वृद्धि प्राप्त करता है।  $t$  समय के बाद वेग ज्ञात कीजिए तथा उतनी ही समय में जिस दूरी से गिरता है वह दूरी ज्ञात कीजिए।

(7)

A spherical rain drop falling freely, gets increase in its volume at each instant of time  $\lambda$  times of its area of surface at that time. Find velocity after time  $t$  and also find the distance by which it falls in that time.

- (c) त्रिविमीय आकाश में किसी वक्र पर गतिमान कण की स्पर्श रेखा एवं प्रधान अभिलम्ब के अनुदिश त्वरण ज्ञात कीजिए।

Find accelerations of a particle moving along a curve in three dimensional space, along tangential and principal normal directions.