MJ-1266

B.Sc. (Part - I)

Term End Examination, March-April, 2022

MATHEMATICS

Paper - I

Algebra and Trigonometry

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50
[*Minimum Marks* : 17

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) प्रारंभिक रूपान्तरणों की सहायता से और $A = IA$ से A^{-1} का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

With the help of elementary transformation and $A = IA$ find A^{-1}, where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(*b*) निम्नलिखित आव्यूह को प्रसामान्य रूप में बदलिए और इसकी जाति ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Reduce the following matrix in the normal form and find its rank :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(*c*) कैले-हेमिल्टन प्रमेय का कथन लिखकर, सिद्ध कीजिए।

State and prove the Cayley-Hamilton theorem.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि की प्रारंभिक संक्रियाओं द्वारा हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$
$$2x + y - z = 1$$

Solve the following equations with the help of elementary operations of matrix method :

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$
$$2x + y - z = 1$$

(*b*) यदि समीकरण $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो सिद्ध कीजिए कि $p^3r = q^3$।

If the roots of the equation $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ are in G.P, then prove that $p^3r = q^3$.

(*c*) कार्डन विधि से त्रिघात को हल कीजिए :

$$x^3 - 18x - 35 = 0$$

Solve the cubic by Cardon's method :

$$x^3 - 18x - 35 = 0$$

(Turn Over)

इकाई / Unit-III

3. (*a*) तुल्यता संबंध की परिभाषा दीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि संबंध $a \equiv b \pmod{m}$, समस्त पूर्णांकों के समुच्चय I में एक तुल्यता संबंध है।

Define equivalance relation and prove that the relation $a \equiv b \pmod{m}$, in the set of all integers I is an equivalence relation.

(*b*) एक समूह G के एक अरिक्त उपसमुच्चय H के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$ जहाँ b^{-}, b का प्रतिलोम है G में।

A necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is that $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$ where b^{-} is the inverse of b in G.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

(Continued)

Prove that the intersection of any two normal subgroup of a group is a normal subgroup.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सिद्ध कीजिए कि इकाई के n, nवें मूलों का गुणात्मक समूह अवशेष कक्षाओं के माड्यूलों n के योगात्मक समूह के तुल्याकारी होता है।

Prove that the multiplicative group of n, nth root of unity is isomorphic to the additive group of residue classes modulo n.

(*b*) शून्य भाजक एवं शून्य भाजक रहित वलय को परिभाषित कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि M सभी 2×2 आव्यूहों, जिनके अवयव पूर्णांक हैं, का समुच्चय है, आव्यूहों का योग और गुणन दो वलय संयोजन है। तब M शून्य भाजक सहित एक वलय है।

Define zero divisors and rings without zero divisors and prove that M is a ring of all 2×2 matrices, whose

(Turn Over)

elements are integers, the addition and multiplication of matrices being the two ring compositions. Then M is a ring with zero divisiors.

(c) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रांत एक क्षेत्र होता है।

Prove that every finite integral domain is a field.

इकाई / Unit-V

5. (a) यदि $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$, $i = 1, 2, 3.....$,

तो सिद्ध कीजिए कि $x_1.x_2.x_3.....$ अनन्त तक $= -1$

If $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$, $i = 1, 2, 3.....$,

then prove that $x_1.x_2.x_3.....$ ad. inf. $= -1$

(b) हल कीजिए

$x^7 + 1 = 0$

Solve that

$x^7 + 1 = 0$

(Continued)

(c) दर्शाइए कि

$$i\log\frac{(x-i)}{x+i} = \pi - 2\tan^{-1}x$$

Show that

$$i\log\frac{(x-i)}{x+i} = \pi - 2\tan^{-1}x$$

MJ-1267

B.Sc. (Part-I)

Term End Examination, March-April, 2022

MATHEMATICS

Paper - II

Calculus

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

[*Minimum Pass Marks* : 17

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) $\varepsilon - \delta$ विधि से दर्शाइए कि

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Using $\varepsilon - \delta$ technique, show that

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(*b*) यदि $y = (x^2 - 1)^n$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(x^2 - 1) y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1) y_n = 0$$

If $y = (x^2 - 1)^n$, then prove that

$$(x^2 - 1) y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1) y_n = 0$$

(*c*) सिद्ध कीजिए :

$$\log(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \cdots\cdots$$

Prove that :

$$\log(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \cdots\cdots$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) निम्न वक्र का अनंतस्पर्शीयाँ ज्ञात कीजिए :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Find the asymptotes of the following curve :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

(*b*) वक्र $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$\rho = \frac{y^2}{a}$$

For the curve $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ prove that

$$\rho = \frac{y^2}{a}$$

(c) वक्र $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

इकाई / Unit-III

3. (a) सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

Prove that :

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$$

(b) यदि $I_n = \int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^n dx; n > 0$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$I_n = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$$

If $I_n = \int_0^a \left(a^2 - x^2\right)^n dx; n > 0$, then prove that

$$I_n = \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}$$

(c) परवलयों $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area enclosed by the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

इकाई / Unit-IV

4. (a) हल कीजिए :

$$y \sin 2x\, dx - (1 + y^2 + \cos^2 x)\, dy = 0$$

Solve that :

$$y \sin 2x\, dx - (1 + y^2 + \cos^2 x)\, dy = 0$$

(b) हल कीजिए :

$$p^2 - 2p \cosh x + 1 = 0$$

Solve that :

$$p^2 - 2p \cosh x + 1 = 0$$

(c) हल कीजिए :

$$(D^2 - 3D + 2)\, y = \cos 2x$$

Solve that :

$$(D^2 - 3D + 2)\, y = \cos 2x$$

इकाई / Unit-V

5. (a) हल कीजिए :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2x-1)\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$$

Solve that :

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (2x-1)\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0$$

(b) प्राचल विचरण विधि से समीकरण $(D^2 + a^2)\, y = \sec ax$ का हल ज्ञात कीजिए।

Apply the method of variation of parameters to solve $(D^2 + a^2)\, y = \sec ax$.

(Continued)

(c) हल कीजिए :

$$\frac{dx}{1+y} = \frac{dy}{1+x} = \frac{dz}{z}$$

Solve that :

$$\frac{dx}{1+y} = \frac{dy}{1+x} = \frac{dz}{z}$$

MJ-1268

B.Sc. (Part - I)

Term End Examination, March-April, 2022

MATHEMATICS

Paper - III

Vector Analysis and Geometry

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

[*Minimum Marks* : 17

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) मान ज्ञात कीजिए

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\bar{r}\,\frac{d\bar{r}}{dt}\,\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]$$

Find the value of

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right]$$

(b) $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ का दिक्-अवकलज बिन्दु $P(1, 1, -1)$ पर $2i + j - k$ की दिशा में ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of $\phi = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ at the point $P(1, 1, -1)$ in the direction $2i + j - k$.

(c) यदि $\bar{r} = xi + yj + zk$, तो दिखाइए कि

$$\nabla \cdot \left[\frac{f(r)\bar{r}}{r}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f\right)$$

If $\bar{r} = xi + yj + zk$, then show that

$$\nabla \cdot \left[\frac{f(r)\bar{r}}{r}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 f\right).$$

इकाई / Unit-II

2. (a) $\int_C [yzdx + (zx+1)dy + xydz]$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C, $(1, 0, 0)$ से $(2, 1, 4)$ तक कोई पथ है।

(Continued)

Evaluate $\int_C [yzdx + (zx+1)dy + xydz]$ where C is any path passing from $(1, 0, 0)$ to $(2, 1, 4)$

(b) समतल में ग्रीन के प्रमेय द्वारा मूल्यांकन कीजिए $\oint_C \left[e^x(x + \sin y)dx + e^x(x + \cos y)dy\right]$ उस वर्ग पर जिसके शीर्ष $(\pm 1, \pm 1)$ है।

Use Green's theorem in plane to evaluate $\oint_C \left[e^x(x + \sin y)dx + e^x(x + \cos y)dy\right]$ over the square with vertices $(\pm 1, \pm 1)$.

(c) $\iint_S \text{curl } F.nds$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ S पृष्ठ $x^2 + y^2 - 2ax + az = 0$ का वह भाग है जो समतल $z = 0$ के ऊपर है तथा $F = (y^2 + z^2 - x^2)\, i + (z^2 + x^2 - y^2)\, j + (x^2 + y^2 - z^2)\, k$ स्टोक्स के प्रमेय का सत्यापन भी कीजिए।

Evaluate $\iint_S \text{curl } F.nds$, where $F = (y^2 + z^2 - x^2)\, i + (z^2 + x^2 - y^2)\, j + (x^2 + y^2 - z^2)\, k$ and S is the portion of the surface $x^2 + y^2 - 2ax + az = 0$ above the plane $z = 0$ and also verify Stoke's theorem.

(Turn Over)

इकाई / Unit-III

3. (*a*) निम्न शांकव का अनुरेखण कीजिए

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0$$

Trace the following conic

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0.$$

(*b*) प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए कि रेखा $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ को स्पर्श करती है।

Find the condition that the line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ may be a tangent to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(*c*) शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ के बिन्दु 'α' पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the normal at a point 'α' on the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

(Continued)

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y - 16z + 111 = 0$, $2x + 2y + 2z = 17$ का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the centre and radius of the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y - 16z + 111 = 0$, $2x + 2y + 2z = 17$.

(*b*) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(1, 2, 3)$ और आधार वक्र, वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x + y + z = 1$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is $(1, 2, 3)$ and base curve is the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x + y + z = 1$.

(*c*) उस लंबवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 तथा अक्ष रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$।

Find the equation of the right circular cylinder whose radius is 2 and axis is the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$.

(Turn Over)

इकाई / Unit-V

5. (*a*) दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के उस प्रतिच्छेद वक्र के केन्द्र का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए जिसके तल दीर्घवृत्तज केन्द्र से p दूरी पर स्थित है।

Find the locus of centres of sections of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ by planes which are at a constant distance p from the centre of the ellipsoid.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का शंकु $\frac{x^2}{b+c}+\frac{y^2}{c+a}+\frac{z^2}{a+b}=0$ ।

Prove that the section of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ by a tangent plane to the cone $\frac{x^2}{b+c}+\frac{y^2}{c+a}+\frac{z^2}{a+b}=0$ is a rectangular hyperbola.

(Continued)

(*c*) समीकरण

$3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$

का समानयन प्रामाणिक रूप में कीजिए तथा शांकवज की प्रकृति बताइए।

Reduce the equation

$3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$

to the standard form and state the nature of the conicoid.