Printed Pages – 8

केन्द्र क्र.
125

NJ-1355

B.Sc. (Part-III) Examination, Mar.-Apr., 2023

MATHEMATICS

Paper - II

(Abstract Algebra)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों के उत्तर दीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) यदि G एक समूह है, f, G का एक स्वाकारिता है और N, G का एक प्रसामान्य उप समूह है। तब सिद्ध कीजिये कि f(N), G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

Let G be a group, f is a automorphism in G and N is a normal subgroup of G. Then prove that f(N) be a normal subgroup of G.

(b) मान लीजिये कि G एक समूह है Z इसका केन्द्र है और $\frac{G}{Z}$ चक्रीय है। तब सिद्ध कीजिये कि G अवश्य ही आबेली है।

Let G be a group with centre Z and $\frac{G}{Z}$ is cyclic. Then prove that G be definitely cyclic.

(c) सिद्ध कीजिये कि किसी समूह G पर संयुग्मी सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध होता है।

Prove that the conjugate relation is an equivalence relation in a group G.

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) सिद्ध कीजिये कि एक वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब किसी विभाग वलय से तुल्यकारी होता है।

Prove that every homomorphic image of a ring R is isomorphic to a quotient ring.

(b) सिद्ध कीजिये कि क्षेत्र F पर बहुपदों का वलय F(x) एक यूक्लीडीय वलय होता है।

Prove that the ring of polynomials F(x) in a field F is a eucledian ring.

(c) सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक आबेली समूह पूर्णांकों के वलय पर एक माड्यूल होता है।

Prove that every abelian group in a ring of integers is a module.

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अरिक्त उपसमुच्चय W को V का एक उपसमष्टि होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध निम्नलिखित है :

(i) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(ii) $a \in F; \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

Prove that a non empty subset W of a vector space V(F) is a subspace of V if and only if :

(i) $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha - \beta \in W$

(ii) $a \in F; \alpha \in W \Rightarrow a\alpha \in W$

(b) दर्शाइये कि सदिश (2, 1, 4), (1, −1, 2), (3, 1, −2) R^3 के लिये एक आधार निर्मित करते हैं।

Show that the vectors (2, 1, 4), (1, −1, 2), (3, 1, −2) form a basis of R^3.

(c) सदिश समष्टि $V_3(R)$ के उपसमुच्चय S = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} के सापेक्ष सदिश α = (4, −3, 2) के निर्देशांक सदिश ज्ञात कीजिये।

Find co-ordinate vector of α = (4, −3, 2) with respect to S = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} which is a subset of vector space $V_3(R)$.

इकाई–IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) सिद्ध कीजिये कि U(F) से V(F) में किसी समाकारिता की अष्टि सदिश समष्टि U(F) की एक उपसमष्टि होती है।

Prove that the kernel of a homomorphism from U(F) into V(F) is a subspace of U(F).

(b) यदि f : $V_3(F) \to V_2(F)$ निम्न प्रकार से परिभाषित है :

f(x, y, z) = (y, z) तो दर्शाइये कि f एक रैखिक रूपांतरण है।

If f : $V_3(F) \to V_2(F)$ be defined by

f(x, y, z) = (y, z)

then show that f is a linear transformation.

(c) एक रैखिक प्रतिचित्रण $f : V_2(R) \to V_3(R)$ जो इस प्रकार परिभाषित है कि $f(a, b) = (a + b, a - b, b)$ $\forall$ $a, b \in R$ तो f का परास, कोटि, शून्य समष्टि एवं शून्यता ज्ञात कीजिये।

A linear mapping $f : V_2(R) \to V_3(R)$ is defined by $f(a, b) = (a + b, a - b, b)$ $\forall$ $a, b \in R$ then find the range, order, null space and nulity of f.

इकाई–V / UNIT-V

Q. 5. (a) यदि α तथा β किसी आन्तर गुणन समष्टि V(F) में कोई दो सदिश हों तो निम्नलिखित को सिद्ध कीजिये :

$$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

If α and β are two vectors in inner product space V(F), then prove that :

$$\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

(b) ग्राम-श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(F)$ के आधार $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$ से एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिये।

Applying the Gram-Schmidt orthogonalization process to obtain an orthonormal basis from the basis $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$.

(c) यदि V(F) x में बहुपदों का एक सदिश समष्टि है, जिसमें आन्तर गुणनफल निम्न रूप से परिभाषित है :

$(p,q) = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)dx$ जहाँ $p = p(x)$, $q = q(x) \in V$ तब $p(x) = x + 2$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$ के लिये निम्न ज्ञात कीजिये :

(i) (p, q)

(ii) $\|p\|$

(iii) $\|q\|$

If V(F) is a vector space of polynomials in x and the inner product in V(F) is defined by :

$(p,q) = \int_0^1 p(x) \cdot q(x) dx$ where $p = p(x)$, $q = q(x) \in V$ then find the following for $p(x) = x + 2$, $q(x) = x^2 - 2x - 3$

(i) (p, q)

(ii) $\|p\|$

(iii) $\|q\|$