Printed Pages – 8

केन्द्र क्र. 125

NJ-1354

B.Sc. (Part-III) Examination,

Mar.-Apr., 2023

MATHEMATICS

Paper - I

(Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों का उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / UNIT-I

Q. 1. (a) यदि श्रेणियाँ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ और $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ क्रमशः A और B पर अभिसरित होती हैं, तब सिद्ध कीजिए :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} r\, a_n = rA \quad (r \in R)$

If series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge to A and B respectively, then prove that :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} r\, a_n = rA \quad (r \in R)$

(b) श्वार्ज के प्रमेय का कथन लिखकर उसे सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwarz's theorem.

(c) फलन $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$ का फोरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए। अतएव व्युत्पन्न कीजिए :

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ...$$

Find the Fourier Series of the function $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$. Hence deduce that :

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ...$$

इकाई–II / UNIT-II

Q. 2. (a) रीमान समाकलनीय फलनों के लिए समाकल गणित का मूलभूत प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Fundamental theorem of integral calculus for Riemann integrable function.

(b) निम्नलिखित समाकल के अभिसरण की जांच कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{1 + x^2}$$

Test the convergence of the following integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{1 + x^2}$$

(c) प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिए $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx$ यदि $a > -1$

Find the value of the following integral with the help of differentiation with respect to parameter. $\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}dx$, if $a > -1$

इकाई–III / UNIT-III

Q. 3. (a) दर्शाइए कि फलन $f(z)=\sqrt{|xy|}$ मूलबिन्दु पर नियमित नहीं है। यद्यपि यह उस बिन्दु पर कौशी-रीमान समीकरणों को संतुष्ट करता है।

Show that the function $f(z)=\sqrt{|xy|}$ is not regular at the origin although Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point.

(b) मोबियस रूपान्तरण के स्थिर बिन्दु को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि मोबियस रूपान्तरण के सापेक्ष तिर्यक अनुपात अपरिवर्तित रहते हैं।

Define fixed point of Mobius transformation. Prove that the cross ratio is invariant under Mobius transformation.

(c) रूपान्तरण $w = ze^{\frac{i\pi}{4}}$ को लेकर w-तल के उस क्षेत्र को ज्ञात कीजिए जो z-तल के रेखाओं $x = 0$, $y = 0$ तथा $x + y = 1$ से परिबद्ध त्रिभुजीय क्षेत्र के संगत है।

Take the transformation $w = ze^{\frac{i\pi}{4}}$ and determine the region in w-plane which corresponds to the triangular bounded region by lines $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ in z-plane.

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) एक दूरीक समष्टि (X, d) में सिद्ध कीजिए :

$$|d(x,z)-d(y,z)| \le d(x,y) \ \forall \ x,y,z \in X$$

In a metric space (X, d) prove that :

$$|d(x,z)-d(y,z)| \le d(x,y) \ \forall \ x,y,z \in X$$

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक व्युत्पन्न समुच्चय संवृत होता है।

Prove that in a metric space, every derived set is a closed set.

(c) सिद्ध कीजिए कि कोई परिमेय संख्या ऐसी नहीं है जिसका घन 3 है।

Show that there is no rational number whose cube root is 3.

इकाई-V / UNIT-V

Q. 5. (a) दर्शाइए कि समष्टि C[a, b] एक वियोज्य समष्टि है।

Show that the space C[a, b] is a separable space.

(b) दर्शाइए कि प्रत्येक संवृत दूरीक समष्टि, बोल्जानों वाइरस्ट्रास गुणधर्म रखता है।

Show that a compact metric space has Bolzano-Weierstrass Property.

(c) यदि (X, d) और (Y, ρ) दो दूरीक समष्टियां हैं और $f : X \to Y$ एकसमान संतत फलन है। यदि $\{x_n\}$. X में कौशी अनुक्रम है तब सिद्ध कीजिए कि $\{f(x_n)\}$ भी Y में एक कौशी अनुक्रम है।

P.T.O.

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and let $f : X \to Y$ be uniformly continuous function. If $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in X, then prove that $\{f(x_n)\}$ is also a Cauchy sequence in Y.