KJ-1354

B.Sc. (Part - III)

Term End Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - I

Analysis

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) अन्तराल $0 < x < 2\pi$ में फलन $f(x) = x$ को प्रदर्शित करने वाली फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series for the function $f(x) = x$ in the interval $0 < x < 2\pi$.

(*b*) दर्शाइए कि फलन (0, 0) पर संतत तो है पर अवकलनीय नहीं है

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Show that the function is continuous but not differentiable at (0, 0)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(*c*) श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए

$$1-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.5^2}-\frac{1}{7.5^3}+\cdots\cdots$$

Test the convergence of the series

$$1-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.5^2}-\frac{1}{7.5^3}+\cdots\cdots$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) सिद्ध कीजिए कि समाकल अपसारी है

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}$$

Prove that integral is divergent

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}$$

(*b*) माना $f \in R[a, b]$ तथा m तथा M फलन f के अन्तराल $[a, b]$ पर निम्न एवं उच्च परिबंध है। तब दर्शाइए कि

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a), \text{ if } b \ge a .$$

Let $f \in R[a, b]$ and m and M are the lower and upper bounds of function f in the interval $[a, b]$. Then show that

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a), \text{ if } b \ge a .$$

(*c*) यदि अन्तराल $[0, 1]$ में $f(x) = x^2$, तब सिद्ध कीजिए कि $f \in R[0, 1]$ तथा $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$ ।

If $f(x) = x^2$ in the interval [0, 1], then prove that $f \in R$ [0, 1] and $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z_1 = -i,\ z_2 = 0,\ z_3 = i$ को बिन्दुओं $w_1 = -1,\ w_2 = i,\ w_3 = 1$ में प्रतिचित्रित करता है।

Find the Mobius transformation that maps points $z_1 = -i,\ z_2 = 0,\ z_3 = i$ into the points $w_1 = -1,\ w_2 = i,\ w_3 = 1$.

(*b*) दर्शाइए कि द्विरैखिक रूपांतरण $w = \frac{5 - 4z}{4z - 2}$ वृत्त $|z| = 1$ को समतल में इकाई वृत्त में रूपान्तरित करता है। इस वृत्त का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

Show that the bilinear transformation $w = \frac{5 - 4z}{4z - 2}$ transform the circle $|z| = 1$, into a unit circle in the plane. Find centre of that circle.

(*c*) दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का मापांक सदैव उनके मापाकों के योग से छोटा या बराबर होता है।

The modulus of the sum of two complex numbers is always less than or equal to the sum of their moduli.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) माना कि (X, d) एक दूरिक समष्टि है और d^* निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

दर्शाइए कि d^*, X पर एक दूरिक है।

Let (X, d) be a metric space and d^* is defined by

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

Show that d^* is a metric on X.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that Every cauchy sequence in a metric space is bounded.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में संवृत्त समुच्चयों के एक स्वेच्छ सर्वनिष्ठ संवृत्त होता है।

Prove that in a metric space, the intersection of an arbitrary collection of closed set is closed.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) दूरिक समष्टि के लिए बेयर संवर्ग प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Baire Category Theorem for metric space.

(*b*) मान लिजिए (X, d) एक दूरिक समष्टि है तथा $A \subseteq X$, तब फलन $f : X \to R$ जो $f(x) = d(x, A)$ $\forall\, x \in X$ से दिया जाता है। एक समान संतत है।

Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$, then function $f : X \to R$ is uniformly continuous, where $f(x) = d(x, A)$ $\forall\, x \in X$.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक दूरिक समष्टि प्रथम गणनीय होती है।

Prove that every metric space is First Countable.

———