KJ-1355

B.Sc. (Part - III)
Term End Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - II

Abstract Algebra

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) यदि G एक परिमित आबेली समूह है, तो सिद्ध कीजिए कि G प्रत्यक्ष गुणनिक के साथ सायलो उपसमूहों का तुल्याकारीता है।

If G be a finite abelian group, then prove that G is isomorphism of sylow subgroups with direct product.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह का केन्द्र प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that centre of any group is a normal subgroup.

(*c*) अन–आबेली समूहों के लिए कौशी प्रमेय को लिखकर हल कीजिए।

State and prove Cauchy theorem for non abelian group.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) वलय के लिए समाकारिता के मूलभूत प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem on Homomorphism of rings.

(*b*) यदि S वलय R की गुणजावली है, तो R/S, R का समाकारी प्रतिबिम्ब है, सिद्ध कीजिए।

If S is any ideal of ring R, then prove that R/S is a isomorphic image of R.

(*c*) किसी वलय के प्रतिरूपक को परिभाषित कीजिए। आइंस्टीन के सूत्र की मदद से बहुपद $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ की खण्डनीयता की जांच कीजिए।

Define module of a ring with the help of Einstein formula check the reducibility of the following polynomial $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$ जहां W_1 एवं W_2, $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं।

Define vector space. Show that $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$ where W_1 and W_2 are two subspaces of $V(F)$.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित जनित सदिश समष्टि का परिमित आधार होता है।

Prove that every finitely generated vector space has a finite basis.

(*c*) यदि $V(F)$ एक परिमित बिमीय सदिश समष्टि हो, तब $V(F)$ के कोई दो आधार समान संख्या में अवयवों को रखते हैं।

If $V(F)$ is a finite dimensional vector space, then two basis of $V(F)$ having the same number of elements.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) शून्य समष्टि को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि यदि दो सदिश समष्टियाँ $U(F)$ और $V(F)$ के बीच रैखिक रूपान्तरण T हो, तो शून्य समष्टि, $U(F)$ की उपसमष्टि होती है।

Define null space of linear transformation and show that if T is a linear transformation from $U(F)$ to $V(F)$, then the null space of T is a subspace of $U(F)$.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है।

Prove that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

is diagonalizable.

(*c*) सदिश समष्टि $V_3(R)$ के लिए आधार समुच्चय $\mathcal{B} = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए।

Find the dual basis of the basis set $\mathcal{B} = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$ for $V_3(R)$.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) यदि α, β एक आंतर गुणन समष्टि V के सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$ ज्यामितीय व्याख्या भी कीजिए।

If α, β are vectors in an inner product space V, then prove that $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$. Give the Geometrical interpetation also.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि एक आंतर गुणन समष्टि में सदिशों का प्रसामान्य लांबिक समुच्चय रैखिकत: स्वतंत्र होता है।

In an inner product space prove that any orthonormal set vectors is linearly independent.

(*c*) ग्राम-श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(R)$ के आधार $\mathscr{B} = \{(1, 0, 1), (1, 2, -2), (2, -1, 1)\}$ से एक प्रसामान्य एवं लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए।

Applying the Gram-Schmidt Orthogonalization process obtain an orthonormal basis from the basis

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 2, -2), (2, -1, 1)\}.$$